

# 热流问题的数值计算

## Numerical Simulations of Thermal & Fluid Problems

### 第二章 一维导热问题的数值解



主讲 陶文铨

西安交通大学能源与动力工程学院  
热流中心 CFD-NHT-EHT CENTER

2007年10月23日，西安

## 第二章 一维导热问题的数值解

### 2.1 一维稳态导热

### 2.2 边界条件及源项的处理

### 2.3 一维非稳态导热

### 2.4 代数方程的求解方法

### 2.5 一维非稳态导热通用程序介绍

### 2.6 数值计算举例

## 2.1 一维稳态导热问题

### 2.1.1 一维稳态导热的通用控制方程

### 2.1.2 通用控制方程控制容积积分法的离散

### 2.1.3 界面导热系数的确定方法

1. 算术平均法(arithmetic mean)

2. 调和平均法(harmonic mean)

## 2.1 一维稳态导热问题

### 2.1.1 一维稳态导热的通用控制方程

#### 1. 数值求解工程传热问题程序编制的两种模式

专用程序，在专用范围内具有通用性；

**FLOWTHERN, POLYFLOW.....**

通用程序，传热、流动、燃烧、传质、化学反应，  
等；**PHOENICS, FLUENT, STAR-CD, CFX....**

**各类程序（软件）都力图具备不同层次的通用性。**

## 体现通用性的方面：

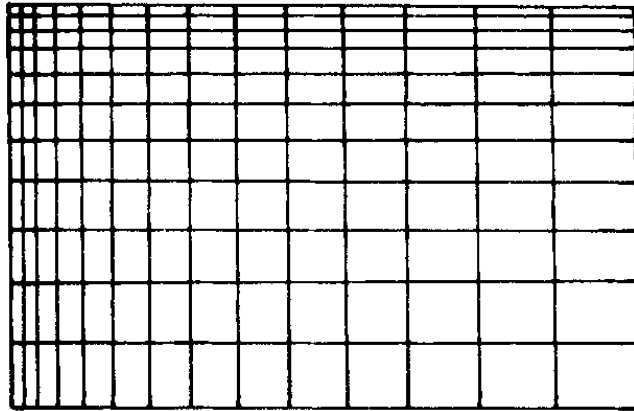
**坐标系：** 同一个程序适用于不同坐标系

**控制方程：** 同一套控制方程适用于流动，传热，  
燃烧，传质，有化学反应的传热，

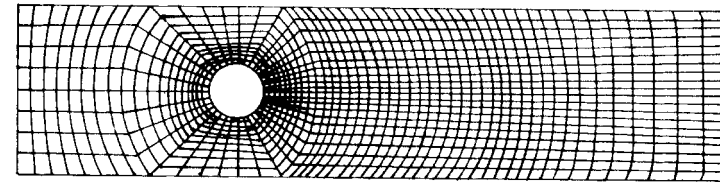
**边界条件：** 三种边界条件都能方便处理，

**源项处理：** 实际工程问题中有各色源项，要发展  
出一种有效的处理方法

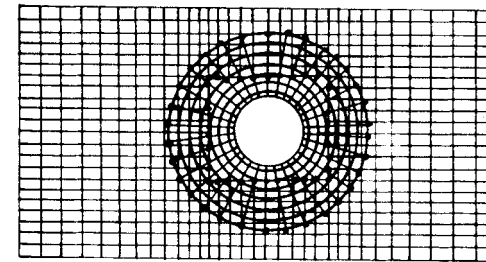
**几何形状：** 能方便地应用于复杂计算区域，结构  
化的网格生成技术，非结构化网格，...



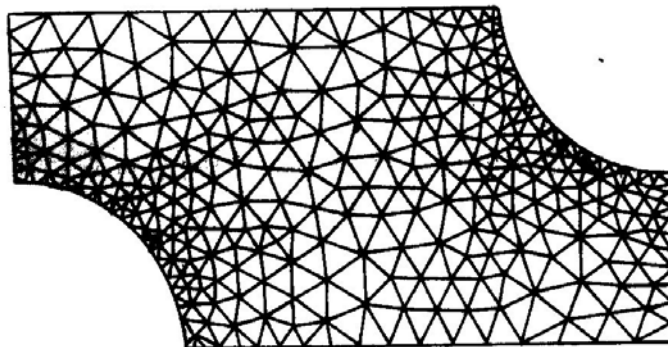
直角坐标非均分网格



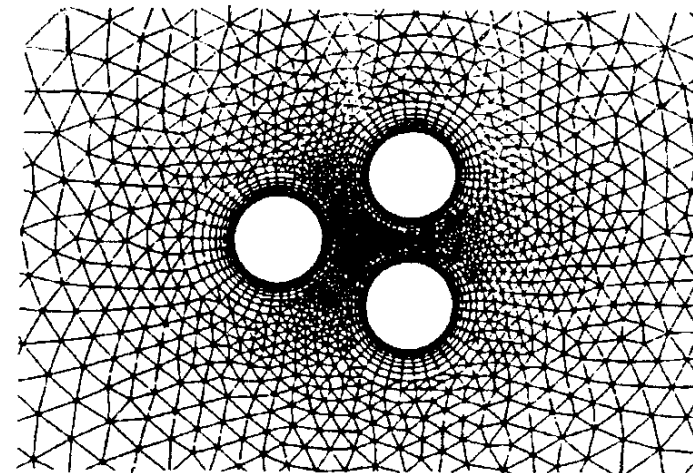
(a)



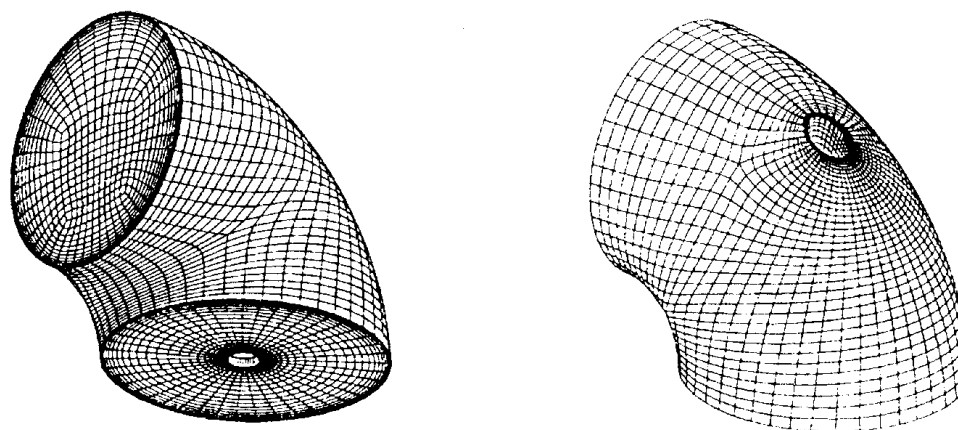
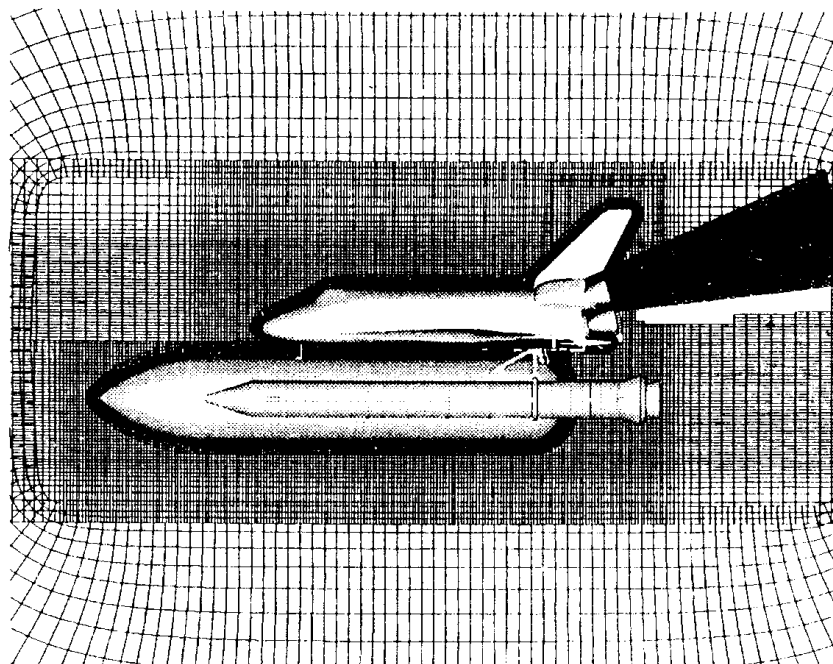
组合网格



非结构化网格







复杂区域的计算网格

## 2. 一维稳态导热问题不同坐标系通用控制方程

$$\frac{1}{A(x)} \frac{d}{dx} \left[ \lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right] + S = 0$$

坐标	坐标系	空间变量	面积因子	图示
1	直角	x	1 (单位面积)	
2	圆柱	r	r (弧度面积)	
3	球	r	r <sup>2</sup> (球面度面积)	
4	变截面问题	垂直于导热面积 的坐标 x	垂直于导热 方向的面积 A(x)	



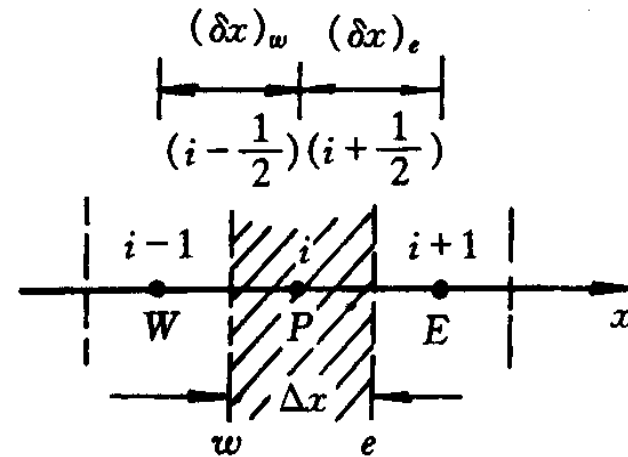
## 2.1.2 通用控制方程控制容积积分法的离散

以  $A(x)$  乘方程两边:  $\frac{d}{dx}[\lambda A(x) \frac{dT}{dx}] + S \cdot A(x) = 0$

假定源项可线性化:  $S = S_C + S_P T_P$

采用分段线性型线;

对 P 控制容积做积分:



$$[\lambda A(x) \frac{dT}{dx}]_e - [\lambda A(x) \frac{dT}{dx}]_w + \int (S_C + S_P T_P) A(x) dx = 0$$

$$\lambda_e A_e(x) \frac{T_E - T_P}{(\delta x)_e} - \lambda_w A_w(x) \frac{T_P - T_W}{(\delta x)_w} \Big]_w + (S_C + S_P T_P) \cdot A_P(x) \cdot \Delta x = 0$$

将  $T_P$  置于等号前,  $T_E, T_W$  置于等号后:

$$T_P \left[ \frac{A_e(x) \lambda_e}{(\delta x)_e} + \frac{A_w(x) \lambda_w}{(\delta x)_w} - S_P A_P(x) \Delta x \right] = T_E \left[ \frac{A_e(x) \lambda_e}{(\delta x)_e} \right] + T_W \left[ \frac{A_w(x) \lambda_w}{(\delta x)_w} \right] + S_C A_P(x) \Delta x$$

采用下列符号式表示方法:

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

$$a_E = \frac{\lambda_e A(x)_e}{(\delta x)_e}, \quad a_W = \frac{\lambda_w A(x)_w}{(\delta x)_w}, \quad b = S_C A_P(x) \Delta x = S_C \Delta V$$

$$a_P = a_E + a_W - S_P \Delta V$$

系数  $a_E, a_W$  的物理意义:

$$a_E = \frac{1}{(\delta x)_e / [\lambda_e A(x)_e]} = \frac{1}{\text{P点与E点间的导热热阻}}$$

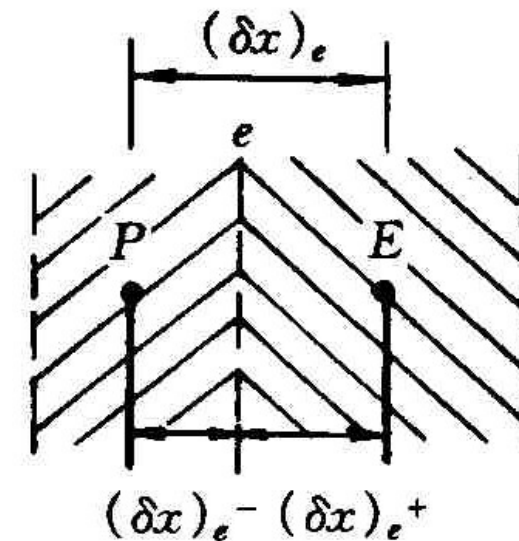
代表了E点对P点的影响，又称影响系数。

## 2.1.3 界面导热系数的确定方法

### 1. 算术平均法( arithmetic mean)

$$\lambda_e = \lambda_P \frac{(\delta x)_{e^+}}{(\delta x)_e} + \lambda_E \frac{(\delta x)_{e^-}}{(\delta x)_e} \quad \text{均分网格} \longrightarrow$$

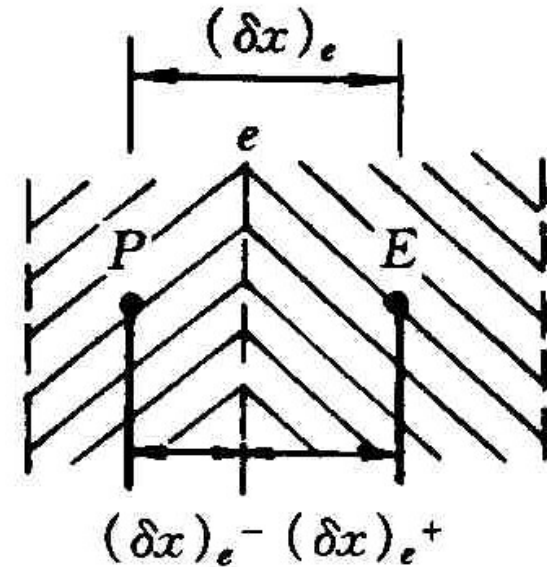
$$\lambda_e = \frac{\lambda_P + \lambda_E}{2}$$



## 2. 调和平均法(harmonic mean)

设P, E处导热系数不同, 据界面热流密度连续原则:

$$\frac{T_E - T_e}{\frac{(\delta x)_{e^+}}{\lambda_E}} = \frac{T_e - T_P}{\frac{(\delta x)_{e^-}}{\lambda_P}} = \frac{T_E - T_P}{\frac{(\delta x)_{e^+}}{\lambda_E} + \frac{(\delta x)_{e^-}}{\lambda_P}}$$



界面右侧

界面左侧

代数运算规则—串联过程热阻叠加

$$\frac{T_E - T_P}{\frac{(\delta x)_{e^+}}{\lambda_E} + \frac{(\delta x)_{e^-}}{\lambda_P}} = \frac{T_E - T_P}{\frac{(\delta x)_e}{\lambda_e}}$$



$$\frac{(\delta x)_e}{\lambda_e} = \frac{(\delta x)_{e^+}}{\lambda_E} + \frac{(\delta x)_{e^-}}{\lambda_P}$$

界面当量导热系数的意义

Harmonic mean

均分网格:

$$\lambda_e = \frac{2\lambda_P\lambda_E}{\lambda_P + \lambda_E}$$

### 3. 两种方法的比较

设  $\lambda_P \gg \lambda_E$  , 热阻主要在E侧, 但据算术平均:

$$\lambda_e = \frac{\lambda_P + \lambda_E}{2} \xrightarrow{\lambda_P \gg \lambda_E} \lambda_e \cong \frac{\lambda_P}{2} \quad \text{热阻} \quad \frac{(\delta x)_e}{\frac{\lambda_P}{2}}$$

极不合理!

据调和平均:

$$\lambda_e = \frac{2\lambda_E\lambda_P}{\lambda_E + \lambda_P} \xrightarrow{\lambda_P \gg \lambda_E} \lambda_e \cong 2\lambda_E \quad \text{热阻} \quad \frac{(\delta x)_e}{2\lambda_E} = \frac{(\delta x)_{e^+}}{\lambda_E}$$

十分合理!

均分网格

调和平均已经广泛为国内外学术界所接受。

## 2.2 边界条件与源项的处理

### 2.2.1 非常数源项的线性化处理

#### 1. 线性化方法实施方式

#### 2. 线性化方法讨论

#### 3. 线性化方法应用实例

### 2.2.2 第二、三类边界条件的处理

#### 1. 区域离散方法A

#### 2. 第二，三类边界条件的统一表示方法

#### 3. 区域离散方法B

## 2.2 边界条件与源项的处理

### 2.2.1 非常数源项的线性化处理

#### 1. 线性化方法实施方式

源项在本数值方法中十分**重要**—不管部长，控制方程中所有无法归入三大项的各项，均属之；

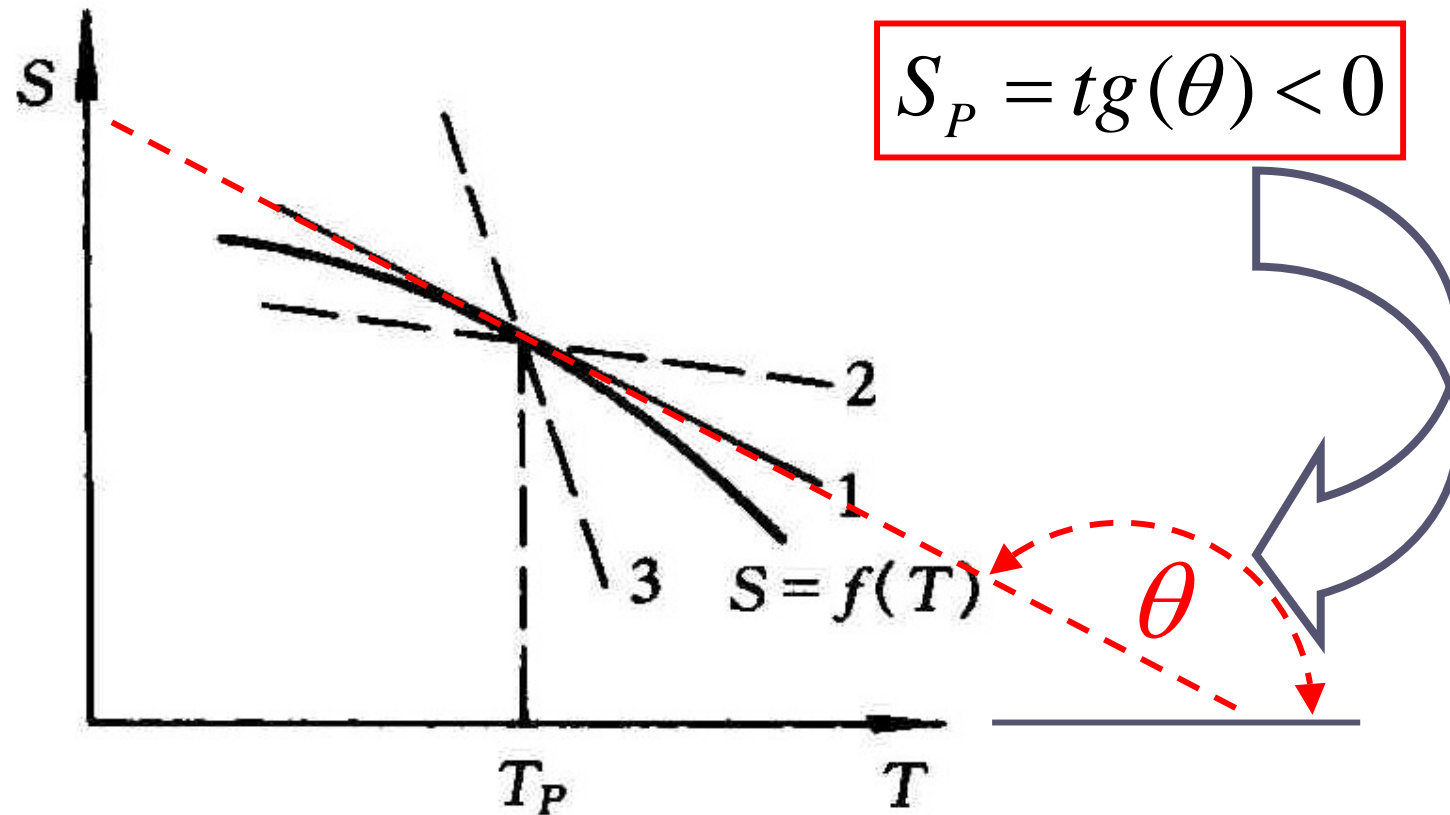
线性化表达式：对任意控制容积P其源项表示为：

$$S = S_C + S_P \phi_P, \quad S_P \leq 0$$

$S_C, S_P$  对控制容积P均为常数， $S_P$ 是变量  $\phi$  的源项曲线  $S = f(\phi)$  在控制容积中P点的斜率。



以变量T为例：



## 2. 线性化方法讨论

(1) 对与被求解变量有关的非常数源项，线性化比假定为常数更合理：用  $S = f(T_P^*)$  来表示P的源项比  $S = S_C + S_P T_P$  落后一个迭代步；

(2) 线性化又是建立线性代数方程所必须的；

(3)  $S_P \leq 0$  是为保证代数方程迭代求解收敛所必须；

代数方程  $a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b$  迭代求解收敛的充分

条件是  $a_P \geq \sum a_{nb}$  ，因为  $a_P = \sum a_{nb} - S_P \Delta V$

所以  $S_P \leq 0$  可以确保代数方程迭代求解收敛。

(4) 如果实际问题的  $S_P > 0$  可以人为地构造一个负的  $S_P$  以有利于迭代过程收敛。

(5)  $S_P$  绝对值的大小对迭代收敛速度的影响

迭代算式: 
$$\phi_P = \frac{\sum a_{nb} \phi_{nb} + b}{\sum a_{nb} - S_P \Delta V}$$

$|S_P|$  ↑ 分母增加，相邻两次迭代值之间的差别减小，在一定迭代次数下，有利于强烈非线性问题迭代求解的收敛，但迭代收敛速度减慢。

### 3. 线性化方法应用实例

(1)  $S = 3 - 5T$ ;  $S_C = 3$ ,  $S_P = -5$

(2)  $S = 3 + 5T$ ;

有多种处理方式:  $\left\{ \begin{array}{l} S_C = 3 + 5T^* \\ S_C = 3 + 7T^*, S_P = -2 \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$

(3)  $S = 4 - 2T^2$ ;

$$\begin{aligned} S &= S^* + \left(\frac{dS}{dT}\right)^* (T - T^*) = [4 - (2T^*)^2] + (-4T^*)(T - T^*) \\ &= 4 - 2T^{*2} + 4T^{*2} - 4T^*T = \underbrace{4 + 2T^{*2}}_{S_C} - \underbrace{4T^*}_{S_P} T \end{aligned}$$

## 2.2.2 第二、三类边界条件的处理

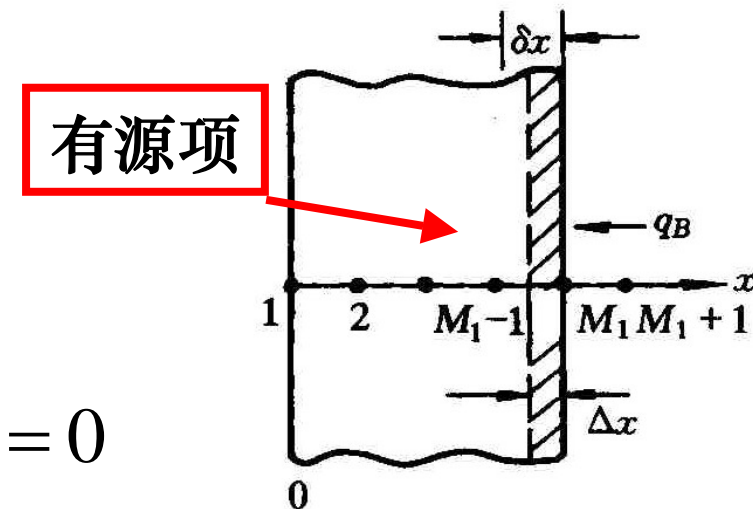
对第二，第三类边界条件问题，边界温度未知，但它们进入到内点的离散方程中，因此需做处理才能使离散方程（代数方程）组封闭。

一种方法是 补充以边界节点代数方程的方法  
边界节点代数方程生成法—控制容积平衡法。

### (1) 区域离散方法A

以进入区域的热量为正：

$$q_B + \lambda \frac{T_{M1-1} - T_{M1}}{\delta x} + \Delta x \cdot S = 0$$



由此可得： $T_{M1} = T_{M1-1} + \frac{\delta x \cdot \Delta x \cdot S}{\lambda} + \frac{q_B \cdot \delta x}{\lambda}$

可由Taylor展开法证明，其截差为： $O(\Delta x^2)$

对第三类边界条件，将边界热流表示成：

$$q_B = h(T_f - T_{M1}) \quad (\text{边界热流进入区域为正})$$

代入上式中的  $q_B$ ，经整理，得

$$T_{M1} = \frac{T_{M1-1} + \frac{\delta x \cdot \Delta x \cdot S}{\lambda} + (\frac{h \cdot \delta x}{\lambda}) T_f}{\frac{h \cdot \delta x}{\lambda} + 1}$$

## (2) 两种边界条件的统一表示方法

## 第二类边界条件

## 第三类边界条件

$q_B$

$$q_B = h(T_f - T_{M1}) = \underline{hT_f} - \underline{hT_{M1}}$$

$$q = \textcolor{red}{A} - \textcolor{blue}{B}T_{M1}$$

$$\textcolor{red}{A} = \begin{cases} q & \text{— 第二类条件} \\ hT_f & \text{— 第三类条件} \end{cases}$$

$$\textcolor{blue}{B} = \begin{cases} 0 & \text{— 第二类条件} \\ h & \text{— 第三类条件} \end{cases}$$

$$T_{M1} = \frac{T_{M1-1} + \frac{\delta x \cdot \Delta x \cdot S}{\lambda} + \left(\frac{h \cdot \delta x}{\lambda}\right)T_f}{\frac{h \cdot \delta x}{\lambda} + 1}$$

$$T_{M1} = \frac{T_{M1-1} + \frac{\delta x \cdot \Delta x \cdot S}{\lambda} + \frac{\delta x}{\lambda} \textcolor{red}{A}}{\frac{\textcolor{blue}{B} \cdot \delta x}{\lambda} + 1}$$

此式适合于两种边界条件



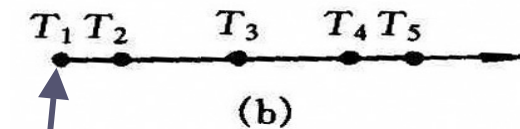
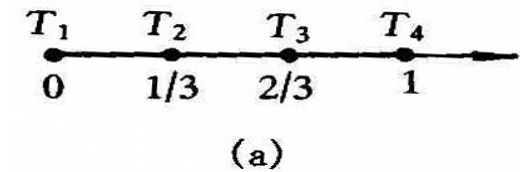
### (3) 区域离散方法B

区域离散方法B的边界节点的控制容积为**零**，只要令以上公式中的  $\Delta x = 0$  即得方法B中的相应公式：

$$q_B + \lambda \frac{T_{M1-1} - T_{M1}}{\delta x} + \Delta x \cdot S = 0$$

第二类边界 —  $T_{M1} = T_{M1-1} + \frac{q_B \cdot \delta x}{\lambda}$

第三类边界 —  $T_{M1} = \frac{T_{M1-1} + (\frac{h \cdot \delta x}{\lambda}) T_f}{1 + \frac{h \cdot \delta x}{\lambda}}$





控制容积为**零**


离散方法B公式具有二阶截差的精度。


## 区域离散方法B

$$T_{M1} = \frac{T_{M1-1} + \frac{\delta x \cdot \Delta x \cdot S}{\lambda} + \frac{\delta x}{\lambda} A}{\frac{B \cdot \delta x}{\lambda} + 1}$$


$$A = hT_f, B = h, \Delta x = 0$$


$$A = q, B = 0, \Delta x = 0$$


$$T_{M1} = \frac{T_{M1-1} + \left(\frac{h \cdot \delta x}{\lambda}\right) T_f}{1 + \frac{h \cdot \delta x}{\lambda}}$$


$$T_{M1} = T_{M1-1} + \frac{q_B \cdot \delta x}{\lambda}$$

## 2.2 边界条件与源项的处理（续）

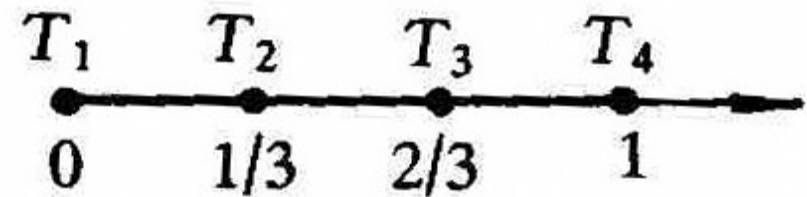
### (4) 算例

**[已知]**  $\frac{d^2T}{dx^2} - T = 0; x = 0, T = 0; x = 1, \frac{dT}{dx} = 1$

**[求解]** 区域内部2-3个节点的温度数值。

**[计算]**

离散方法A，内部取2点，



$T_2, T_3$  用二阶截差离散，

$T_4$  用一阶截差离散:  $\frac{T_4 - T_3}{1/3} = 1 \rightarrow T_4 - T_3 = 1/3$

$T_4$  用二阶截差离散:  $T_{M1} = T_{M1-1} + \frac{\delta x \cdot \Delta x \cdot S}{\lambda} + \frac{q_B \cdot \delta x}{\lambda}$

**问题：源项是多少？** 节点4代表半个控制容积，所以

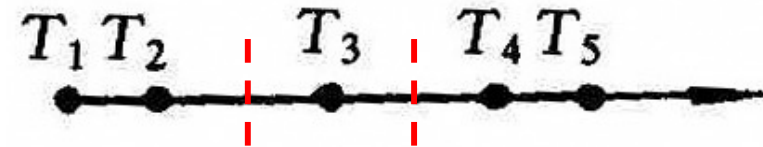
根据方程  $\frac{d^2 T}{dx^2} - T = 0$      $S = -T_4$      $T_{M1} = T_{M1-1} + \frac{\delta x \cdot \Delta x \cdot S}{\lambda} + \frac{q_B \cdot \delta x}{\lambda}$

于是 
$$T_4 = T_3 - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot T_4}{1} + \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{1} \quad \rightarrow \quad \frac{19}{18} T_4 - T_3 = \frac{1}{3}$$

**边界节点不同截差离散对数值计算结果的影响**

格 式	$T_2$	$T_3$	$T_4$
精 确 解	0.220 0	0.464 8	0.761 6
一阶截差	0.247 7	0.522 9	0.856 3
二阶截差	<u>0.216 4</u>	<u>0.457 0</u>	<u>0.740 8</u>

离散方法B，内部取3点，



内部结点  $T_2, T_3, T_4$  用二阶截差离散，边界节点  $T_5$

按前述公式 
$$T_{M1} = T_{M1-1} + \frac{q_B \cdot \delta x}{\lambda}$$

数值结果更接近与精确解：

格 式	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$
精 确 解	0.108 5	0.337 7	0.604 8	0.761 6
区域离散方法 B 的数值解	0.108 4	0.337 2	0.603 5	0.770 2

## 2.3 一维非稳态导热问题

### 2.3.1 一维非稳态导热控制方程的离散化

1. 控制方程

2. 控制容积均分

3. 一般化时间型线下的积分结果

4. 稳定性分析结果

5. 一维非稳态导热三种常见格式

### 2.3.2 数学上的稳定未必导致物理上有意义的解

## 2.3.1 一维非稳态导热控制方程的离散化

### 1. 控制方程

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{A(x)} \frac{d}{dx} \left[ \lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right] + S$$

### 2. 控制容积均分

设  $\rho c$  与时间无关，在  $\Delta t$  时间间隔内对P做积分：

$$(\rho c)_P A_P(x) \Delta x (T_P^{n+1} - T_P^n) = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\lambda_e A_e(x) (T_E - T_P)}{(\delta x)_e} - \frac{\lambda_w A_w(x) (T_P - T_W)}{(\delta x)_w} \right] dt$$

空间阶梯型型线

需要选择对时间的型线

$$+ \Delta x \int_t^{t+\Delta t} (S_C + S_P T_P) dt$$



### 3. 一般化时间型线下的积分结果

$$\int_t^{t+\Delta t} T dt = [fT^{t+\Delta t} + (1-f)T^t] \Delta t, \quad 0 \leq f \leq 1$$

代入型线，积分可得：

$$a_P T_P = a_E [fT_E + (1-f)T_E^0] + a_W [fT_W + (1-f)T_W^0] + T_P^0 [\textcolor{red}{a}_P^0 - (1-f)a_E - (1-f)a_W + (1-f)S_P A_P(x) \Delta x] + S_C A_P(x) \Delta x$$

$$a_E = \frac{\lambda_e A_e(x)}{(\delta x)_e} = \frac{A_e(x)}{\frac{(\delta x)_{e^+}}{\lambda_E} + \frac{(\delta x)_{e^-}}{\lambda_P}} \quad a_W = \frac{\lambda_w A_w(x)}{(\delta x)_w} = \frac{A_w(x)}{\frac{(\delta x)_{w^+}}{\lambda_P} + \frac{(\delta x)_{w^-}}{\lambda_W}}$$

$$a_P = fa_E + fa_W + a_P^0 - fS_P A_P(x) \Delta x \quad a_P^0 = \frac{\rho c A_P(x) \Delta x}{\Delta t} = \frac{\rho c \Delta V}{\Delta t}$$

## 4. 稳定性分析结果

由von Neumann分析法得：

$0.5 \leq f \leq 1$ ，初值问题格式绝对稳定；

$0 \leq f < 0.5$ ，格式条件稳定： $\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2(1-f)}$

## 5. 一维非稳态导热三种常见格式

(1) 显式,  $f = 0$  ;

(2) 全隐式,  $f = 1$  ;

(3) C-N格式,  $\frac{T_P - T_P^0}{\Delta t} = \frac{a}{2} \left( \frac{T_E - 2T_P + T_W}{\Delta x^2} + \frac{T_E^0 - 2T_P^0 + T_W^0}{\Delta x^2} \right)$   
 $f = 0.5$

## 2.3.2 数学上的稳定未必导致物理上有意义的解

通过分析一个实例予以说明。

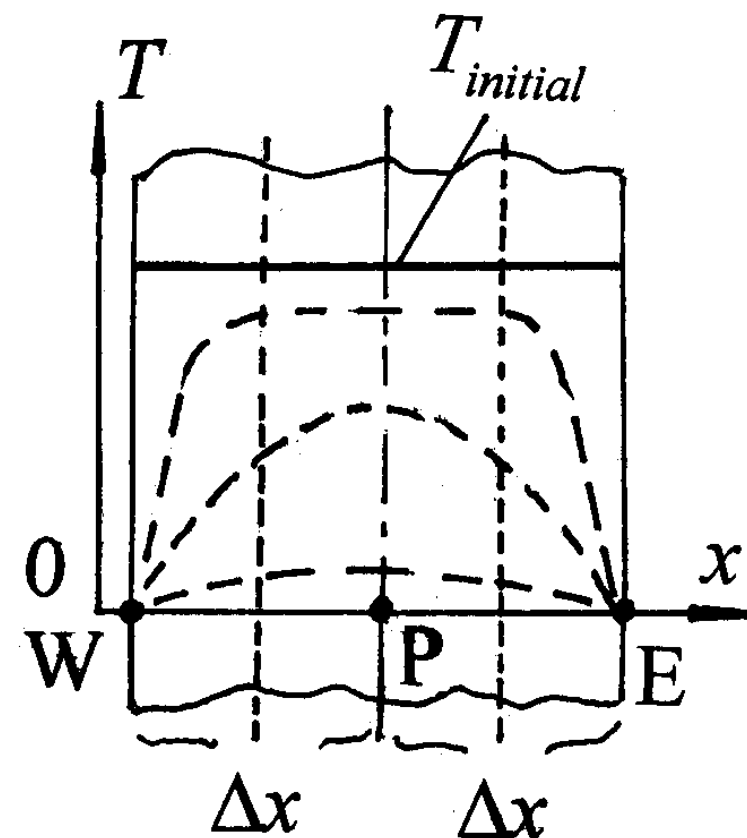
**[已知]** 无内热源一维非稳态导热，初场均匀，两表面温度突然降低到零度。

**[求]** 内部温度随时间的变化

**[解]** 方法A离散区域，

取三个节点。

从物理过程本身可以预期物体中温度变化规律如右图示。



对进入第二时层后的温度场进行分析：

$$T_E = T_E^0 = T_W = T_W^0 = 0 ; \quad S_C = 0, S_P = 0$$

由 
$$a_P T_P = a_E [f \cancel{T_E} + (1-f) \cancel{T_E^0}] + a_W [f \cancel{T_W} + (1-f) \cancel{T_W^0}] + T_P^0 [a_P^0 - (1-f)a_E - (1-f)a_W + (1-f) \cancel{S_P} A_P(x) \Delta x] + \cancel{S_C} A_P(x) \Delta x$$

得 
$$a_P T_P = T_P^0 [a_P^0 - (1-f)a_E - (1-f)a_W]$$

即： 
$$\frac{T_P}{T_P^0} = \frac{a_P^0 - (1-f)(a_W + a_E)}{a_P} = \frac{a_P^0 - (1-f)(a_W + a_E)}{a_P^0 + f(a_W + a_E)}$$

其中 
$$a_E = a_W = \frac{\lambda \cdot 1}{\Delta x}, \quad a_P^0 = \frac{\rho c_p \Delta x}{\Delta t}$$

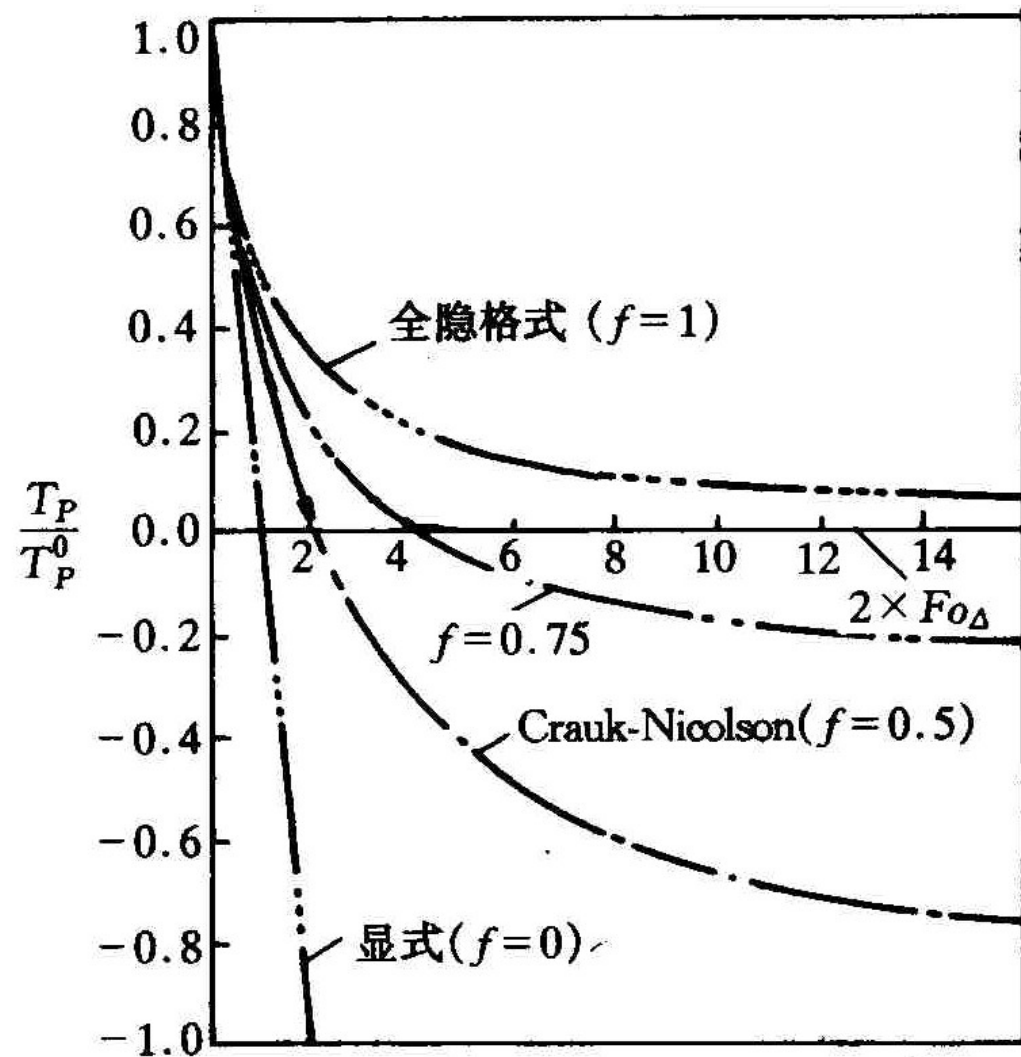
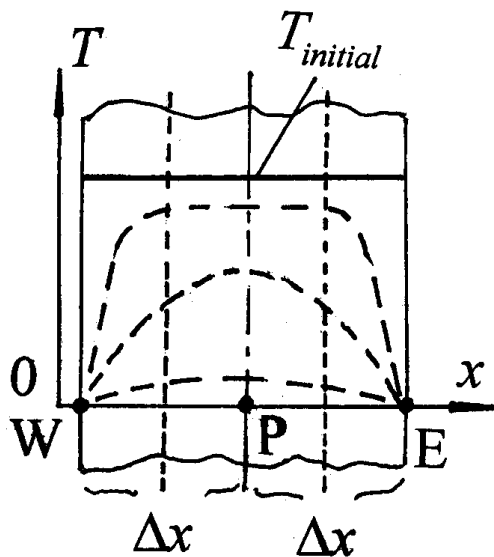
代入，得

$$\frac{T_P}{T_P^0} = \frac{1 - 2(1-f)(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2})}{1 + 2f(\frac{a\Delta t}{\Delta x^2})}$$

$$\frac{T_P}{T_P^0} = \frac{1 - 2(1-f)Fo_\Delta}{1 + 2fFo_\Delta}$$

从物理上要求：

$$\frac{T_P}{T_P^0} > 0$$



这只有当  $f = 1$ （全隐格式）才能满足。

从物理上分析—非稳态导热离散方程可写为：

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + a_t T_P^0 + b$$

要获得有物理意义的解，各影响系数均需大于零：

$$a_P^0 - (1-f)a_E - (1-f)a_W \geq 0$$

$$\frac{\rho c_p \Delta x}{\Delta t} \geq 2(1-f) \frac{\lambda \cdot 1}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\lambda}{\rho c_p}\right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{a \Delta t}{\Delta x^2}$$

$$Fo_{\Delta} \leq \frac{1}{2(1-f)}$$

## 2.4 求解代数方程的TDMA方法

### 2.4.1 一维导热问题代数方程通用形式

### 2.4.2 Thomas算法的一般形式

(1) 消元过程—把每行的未知数由三个减少为二个。

(2) 回代过程—从M1点开始，项消元公式 逐一得出各点之值。



## 2.4 求解代数方程的TDMA方法

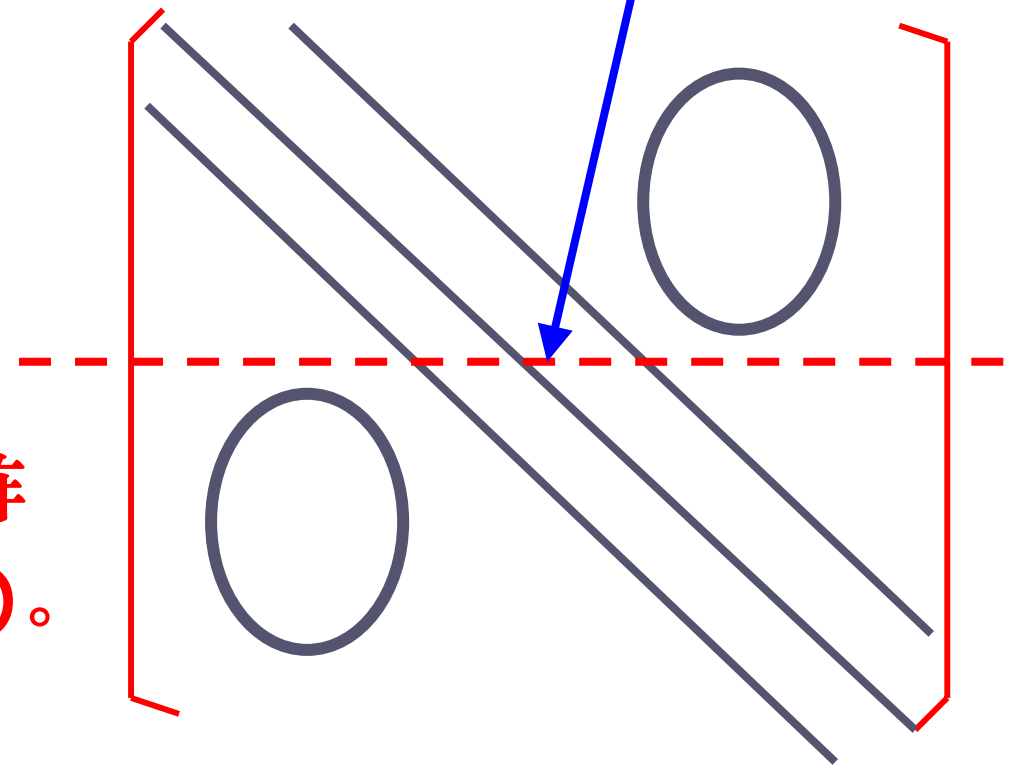
### 2.4.1. 一维导热问题代数方程通用形式

稳态及非稳态隐式  
( $f > 0$ )都要联立求解一  
组代数方程：

$$a_P T_P = a_E T_E + a_W T_W + b$$

其系数矩阵是一三对角阵  
(Tri-diagonal matrix)。

每行三个未知数



## 2.4.2 Thomas算法的一般形式

将上式改写为：

$$A_i T_i = B_i T_{i+1} + C_i T_{i-1} + D_i, i = 1, 2, \dots, M1 \quad (a)$$

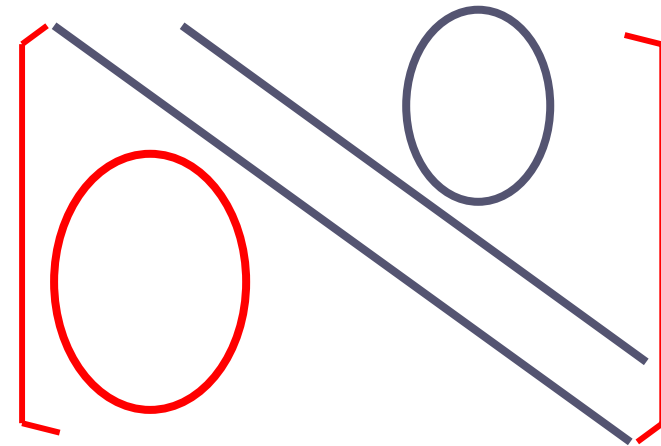
端点条件：  $i=1, C_i=0$ ;  $i=M1, B_i=0$

(1) 消元过程—把每行的未知数由三个减少为二个。

设消元后方程形式为：

$$T_{i-1} = P_{i-1} T_i + Q_{i-1} \quad (b)$$

系数移到等号后



所谓消元就是要找出系数 $P_i, Q_i$ 与 $A_i, B_i, C_i, D_i$ 间的关系。

将(b)乘以 $C_i$ ,并从(a)式减去:

$$A_i T_i = B_i T_{i+1} + \cancel{C_i T_{i-1}} + D_i \quad (a)$$

$$- \quad \cancel{C_i T_{i-1}} = C_i P_{i-1} T_i + C_i Q_{i-1} \quad (b)$$

---


$$A_i T_i - C_i P_{i-1} T_i = B_i T_{i+1} + D_i + C_i Q_{i-1}$$

$$T_i = \left( \frac{B_i}{A_i - C_i P_{i-1}} \right) T_{i+1} + \frac{D_i + C_i Q_{i-1}}{A_i - C_i P_{i-1}}$$

对照  $T_{i-1} =$   $\underbrace{P_{i-1} T_i}_{P_{i-1} T_i} + \underbrace{Q_{i-1}}_{Q_{i-1}}$

$$P_i = \frac{B_i}{A_i - C_i P_{i-1}}; \quad Q_i = \frac{D_i + C_i Q_{i-1}}{A_i - C_i P_{i-1}};$$

上式特点：数学上是**递归的 (recurrent)**—首先  
必须知道 $P_1, Q_1$ 。 试重新审视式(a)

$$A_i T_i = B_i T_{i+1} + C_i T_{i-1} + D_i, \quad i = 1, 2, \dots, M1 \quad (a)$$

端点条件：  $i=1, C_i=0; i=M1, B_i=0$

如果将(a)式用于 $i=1$ ,则立即可得出 $i=1$  时两点上  
未知量的关系式，将它与(b) 相比就能得出 $P_1, Q_1$ 。

$$i = 1, C_1 = 0, \quad A_1 T_1 = B_1 T_2 + D_1$$

$$T_1 = \frac{B_1}{A_1} T_2 + \frac{D_1}{A_1} \longrightarrow P_1 = \frac{B_1}{A_1}; \quad Q_1 = \frac{D_1}{A_1}$$

(2) 回代过程—从M1点开始，利用式(b) 逐一得出 $T_i$ 。

$$A_{M1} T_{M1} = \cancel{B_{M1}}^0 T_{M1+1} + D_{M1}$$

端点条件:  $i = 1, C_i = 0; i = M1, B_i = 0$

$$T_{M1} = Q_1 \longrightarrow \text{逐一得出: } T_{M1-1}, \dots, T_2, T_1。$$

即，利用：

$$T_{i-1} = P_{i-1}T_i + Q_{i-1}$$

可由  $T_{M1}$  ，逐一得出  $T_{M2}, T_{M3}, \dots, T_2, T_1$

## 2.5 一维非稳态导热通用程序介绍

### 2.5.1 编制通用程序的一些基本考虑

### 2.5.2 一维非稳态导热程序的功能与算法特点

### 2.5.3 通用程序的模块结构与流程

### 2.5.4 各模块的基本功能

### 2.5.5 一维非稳态导热程序使用方法

### 2.5.6 一维非稳态导热程序程序浏览

## 2.5 一维非稳态导热通用程序介绍

### 2.5.1 编制通用程序的一些基本考虑

1. 从守恒型通用控制方程式出发建立离散方程，以使程序具有一定的通用性。
2. 将程序分为不变的通用部分和与具体问题有关的用户部分两大块；前者为**black box**,而后者由用户输入与具体问题有关的条件。
3. 采用分块结构，每块完成一定任务，具有相对独立性，以其输入输出与其他模块连接；



4. 程序按快执行，逻辑清楚，少采用难懂复杂的流程；
5. 离散方程的建立与求解应属于两个模块，便于进行差分格式与求解方法的改动；
6. 具有基本前、后处理功能；或者输出数据能适应其它后处理软件的需要。

### 2.5.2 一维非稳态导热程序的功能与算法特点

- 1.功能**—可进行一维非稳态非线性导热型问题的数值计算：适用于三种坐标系以及变截面情形；适用于三种边界条件；可计算一部分充分发展对流换热。

## 1.主要算法:

- (1) 采用全隐格式;
- (2) 区域离散采用方法B;
- (3) 界面当量导热系数采用调和平均方法;
- (4) 非常数源项采用局部线性化处理;
- (5) 采用TDMA算法求解代数方程;
- (6) 第二类、第三类边界条件统一处理。

### 2.5.3 通用程序的模块结构与流程

**1.八个模块:** SPECI, GRID, DIFSOR, INTERPRINT, COEFF, TDMA, GPRINT, SPRINT

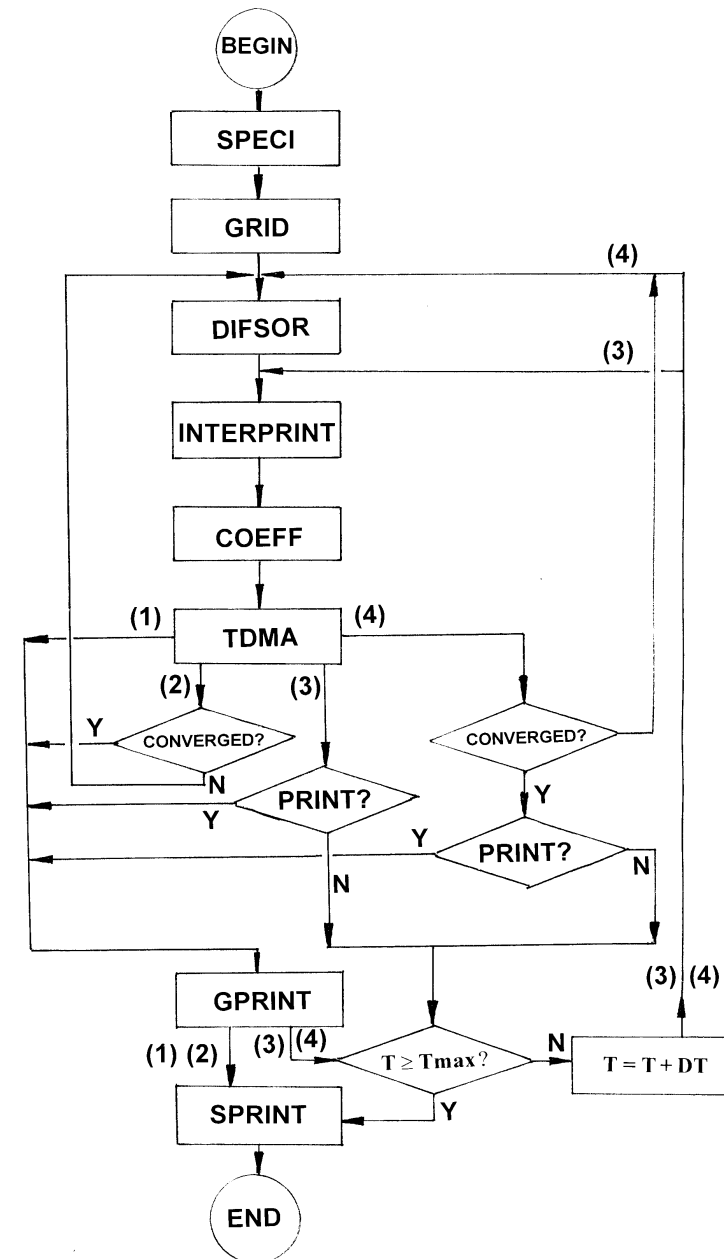
- (1) 稳态线性导热问题
- (2) 稳态非线性导热问题
- (3) 非稳态线性导热问题
- (4) 非稳态非线性导热问题

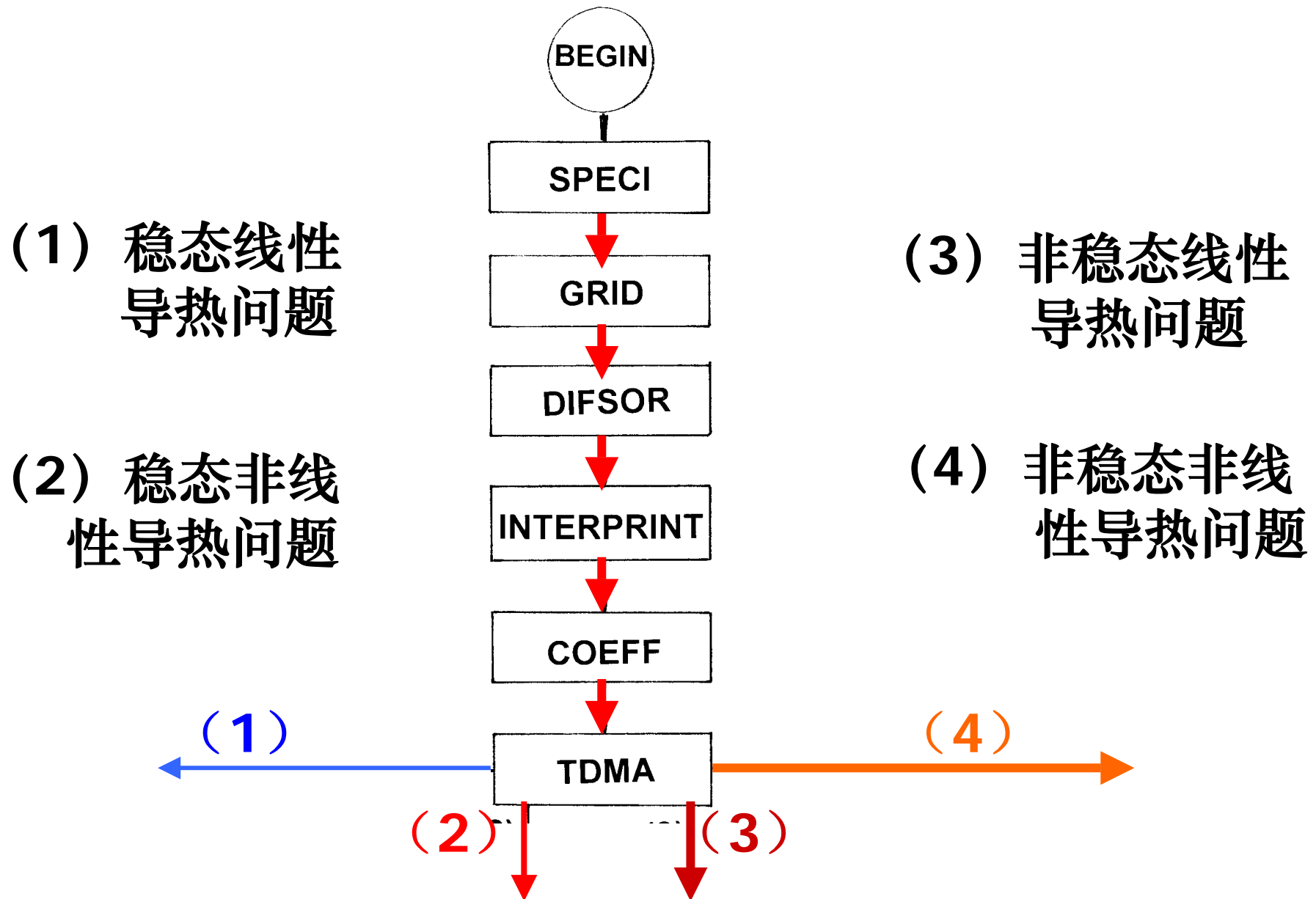
不变部分

COEFF, TDMA, GPRINT

用户部分

SPECI, GRID, DIFSOR,  
INTERPRINT, SPRINT



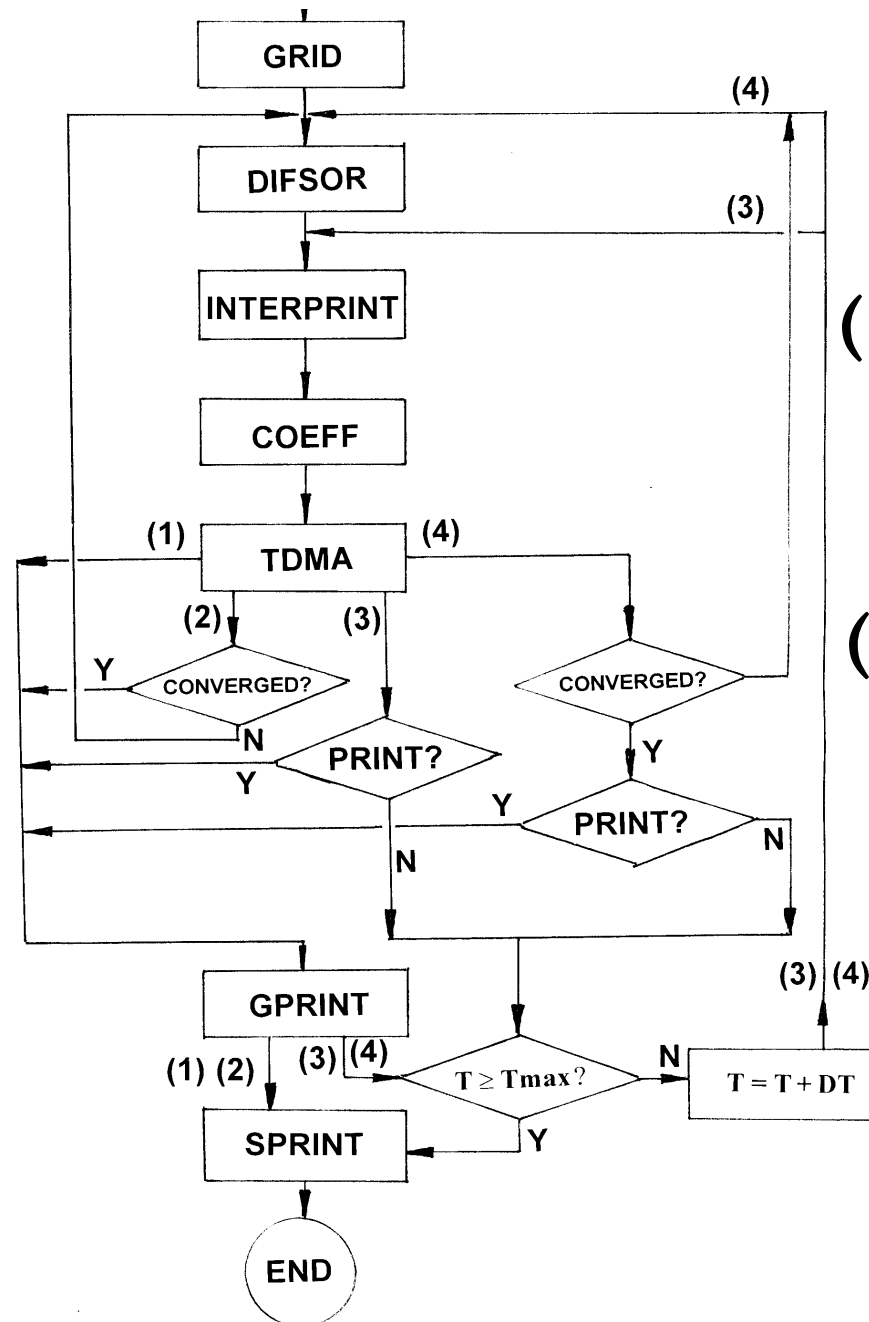


(1) 稳态线性  
导热问题

(2) 稳态非线性  
导热问题

(3) 非稳态线性  
导热问题

(4) 非稳态非线性  
导热问题



## 2.5.4 各模块的基本功能

- 1.SPECI—给定所求解的问题，包括边界条件；
- 2.GRID—用方法B生成网格；
- 3.DIFSOR—给定扩散系数与源项；
- 4.INTERPRINT—输出中间求解结果；
- 5.COEFF—计算离散方程系数；
- 6.TDMA—用三对角阵算法求解代数方程；
- 7.GPRINT—输出通用结果；
- 8.SPRINT—输出特殊结果。

## 2.5.5 一维非稳态导热程序使用方法

1. 写出所计算问题的控制方程及其边界条件，与下式相比

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{A(x)} \frac{d}{dx} \left[ \lambda A(x) \frac{dT}{dx} \right] + S$$

确定

1) 表徵问题类型的控制参数LS

LS=1, 2, 3, 4 分别代表上述四类问题；

2) 表徵坐标系的控制参数MD

MD=1, 2, 3, 4 分别代表直角，圆柱，球坐标系以及变截面问题；

### 3) 表徵边界条件类型的控制参数 $KE, KI$

$KE, KI = 1, 2, 3$  分别代表外边界与内边界为第一类，第二类及第三类边界条件；

### 4) 广义扩散系数 $GM(i)$ , 源项

2. 对第二、三类边界条件，确定 $A, B$ ；对非常数源项确定 $SC, SP$ ；

3. 确定网格疏密变化方式控制参数 $PW$ 之值： $PW = 1$ ，小于1，大于1分别表示沿 $X$ 增加方向网格均分，逐渐变密（逐密）与逐稀；



4. 填写5个用户模块；如果某块无内容可填，应保留成为空块；
5. 应用编译软件POWER STATION 连结主程序与用户子程序，进行计算。

### 2.5.6 一维非稳态导热程序程序浏览

着重介绍主程序； 其它模块 只做简要介绍。

本程序可从本组网站或ftp下载：

<http://nht.xjtu.edu.cn>

<ftp://nht:nht@202.117.28.172:21>

M:13571803560

```
!.....一维非稳态导热通用程序(不变部分)
! This is a general purpose program to solve 1-D diffusion
! problem in the form of:
!
!.....  $\rho c \frac{dT}{dz} = 1/a(x) \frac{d}{dx} (a(x) \Gamma \frac{dT}{dx}) + s$ 
!
!*****2003.7 revised*****
!.....Define Variables.....
MODULE VARIABLES
  INTEGER PARAMETER:: L1=130
  REAL DIMENSION(L1):: X,XF,XM,XP,R,RF,AP
  REAL DIMENSION(L1):: AE,AW,CN,T,TA
  REAL DIMENSION(L1):: TG,GM,RC
  INTEGER:: K=1,KM=1,KP=1,OM=1
  INTEGER:: JB,JE,KE,KI,KF,KN,KR,KT,LS,MD,M1,M2,NF.....
  REAL:: AEC,AI,BE,BI,DF,DS,DT,EP,EX,PW,TU,TM,XE,XI
  REAL:: A1,A2,T2,TC,SC,SP,RO,TE,DN,LM
END
```

```

!-----Main Program-----
PROGRAM MAIN
USE VARIABLES
IMPLICIT NONE
INTEGER I
+
OPEN(1,FILE="q.dat")+
OPEN(2,FILE="temp.dat")+
..... NF=1! (求解变量指标) +
..... KN=1! (非稳态问题输出局部变量, 输出一次加 1) +
..... TU=0! (当前时间) +
150 .. KT=1! (非线性问题迭代次数) +
..... CALL Speci .. !First to specify the problem+
..... CALL Grid .. !Set up grid points+
200 .. CALL Difsor .. !Specify the diff-coeff and source term+
220 .. CALL InterOutput .. !Output intermediate results+
..... CALL Coeff .. !Set up coefficients of discretization equation+
..... CALL TDMA .. !Solve the algebraic equation by TDMA+
..... IF(LS.EQ.2.OR.LS.EQ.4) THEN ! (对非线性问题) +
..... .. IF(DF.GT.EP) THEN! (如果最大偏差大于允许值) +
..... .. .. DO I=1,M1+
..... .. .. .. TA(I)=TA(I)+OM*(T(I)-TA(I))! (采用亚松弛方式将当前解付给上一次迭代值)+
..... .. .. .. END DO+
..... .. .. DF=0! (最大偏差置零) +

```

```

.....KT=KT+1! (非线性问题迭代次数加 1) ↵
.....GOTO 200! (转到 DIFSOR 模块重新计算扩散系数与源项) ↵
.....END IF ↵
...END IF ↵
..CALL GPRINT! (四类问题均要经过一般输出) ↵
..IF (LS.EQ.3.OR.LS.EQ.4) THEN! (对非稳态问题) ↵
...IF (TU.LT.TM) THEN! (时间小于设定的最大值) ↵
→ ..DO I=1,M1 ↵
→ ....TG(I)=T(I)! (当前计算结果付给上一时层) ↵
→ ..END DO ↵
.....KT=1! (下一时间步, 非线性问题迭代从头开始)
→ ..IF (LS.EQ.3) THEN! (非稳态线性问题) ↵
→ ....GOTO 220! (转到中间输出模块) ↵
→ ..ELSE (非稳态非线性问题) ↵
→ ....GOTO 200! (转到 DIFSOR 模块重新计算扩散系数与源项)
      |END IF ↵
→ END IF ↵

```

· CALL TDMA ··· !Solve the algebraic equation by TDMA ·

· IF (LS.EQ.2.OR.LS.EQ.4) THEN ! (对非线性问题) ·

···· IF (DF.GT.EP) THEN ! (如果最大偏差大于允许值) ·

····· DO I=1,M1 ·

····· TA(I)=TA(I)+OM\*(T(I)-TA(I)) ! (采用亚松弛方式将当前解付给上一次迭代值) ·

····· END DO ·

····· DF=0 ! (最大偏差置零) ·

···· KT=KT+1 ! (非线性问题迭代次数加 1) ·

···· GOTO 200 ! (转到 DIFSOR 模块重新计算扩散系数与源项) ·

···· END IF ·

END IF ·

CALL GPRINT · !(四类问题均要经过一般输出) ·

· IF (LS.EQ.3.OR.LS.EQ.4) THEN ! (对非稳态问题) ·

· IF (TU.LT.TM) THEN ! (时间小于设定的最大值) ·

· ··· DO I=1,M1 ·

· ··· TG(I)=T(I) ! (当前计算结果付给上一时层) ·

· ··· END DO ·

· ··· KT=1 ! (下一时间步, 非线性问题迭代从头开始)

· ··· IF (LS.EQ.3) THEN ! (非稳态线性问题) ·

· ····· GOTO 220 ! (转到中间输出模块) ·

· ··· ELSE (非稳态非线性问题) ·

· ····· GOTO 200 ! (转到 DIFSOR 模块重新计算扩散系数与源项) ·

· ··· END IF ·

· END IF ·

END IF ·

!.....special results print out, if not, just leave it open.....  
~~~~~

```
→  · · CALL SPRINT  
→  · · IF(NF.NE.KM) THEN  
→  · · · · NF=NF+1  
→  → GOTO 150  
→  · · END IF
```

~~~~~  
CLOSE(2)

~~~~~  
CLOSE(1)

END

~

~

!.....Subroutine.....  
~~~~~

SUBROUTINE SETUP

```
!.....Subroutine.....  
SUBROUTINE SETUP  
  
USE VARIABLES  
REAL DIMENSION(L1)::P,Q  
ENTRY COEFF  
!.....coefficients of boundary points.....  
IF(KI.LE.1) THEN  
  · · AP(1)=1  
  · · AE(1)=0  
  · · AW(1)=0  
  · · CN(1)=AI  
ELSE  
  · · AE(1)=GM(1)/XM(2)  
  · · AP(1)=AE(1)+BI
```

## ENTRY TDMA

!.....elimination.....

$$P(1)=AE(1)/AP(1)$$

$$Q(1)=CN(1)/AP(1)$$

DO I=2,M1

$$P(I)=AE(I)/(AP(I)-AW(I)*P(I-1))$$

$$Q(I)=(CN(I)+AW(I)*Q(I-1))/(AP(I)-AW(I)*P(I-1))$$

END DO

!.....back substitution.....



ENTRY GPRINT

IF(LS.EQ.3.OR.LS.EQ.4)·THEN

· ·  $M = (TU + 0.5 \cdot DT) / (K \cdot DT)$

· · IF(M.NE.KN)·THEN

· · · ·  $TU = TU + DT$

→ RETURN

· · END·IF

END·IF

!.....surface flux calculation.....

SELECT CASE(KI)

· · CASE(1)

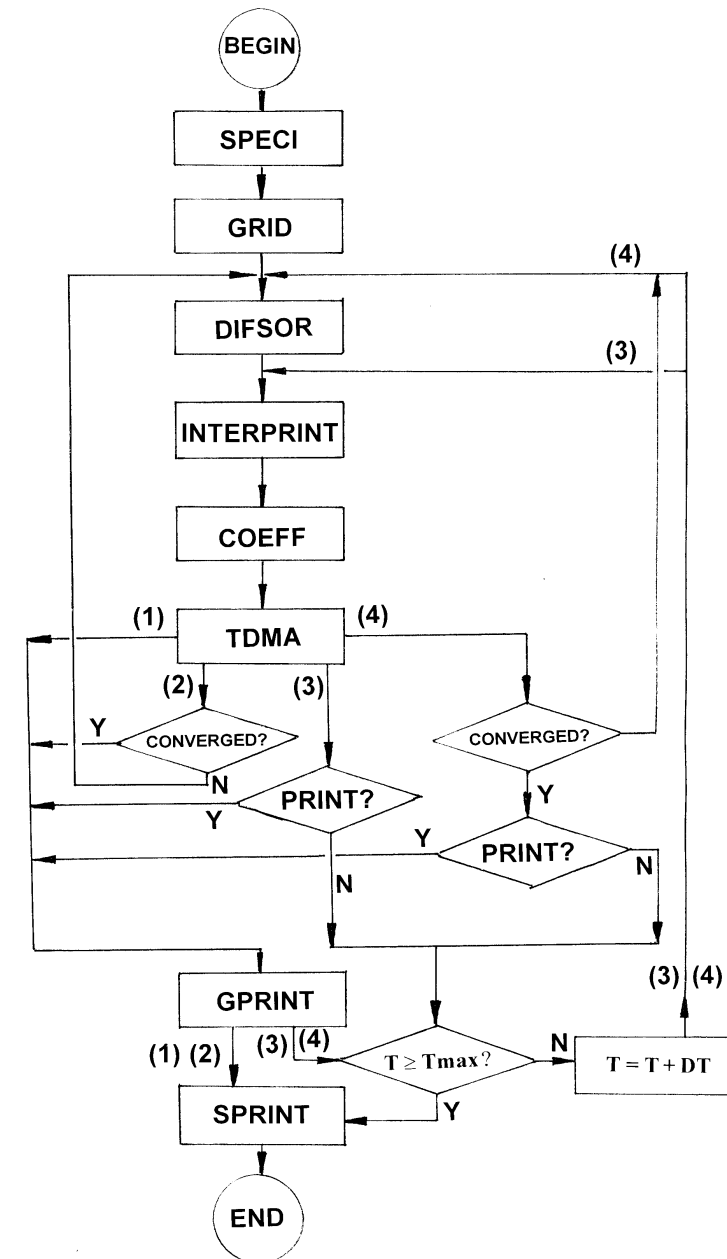
· · · ·  $QI = GM(1) \cdot (T(1) - T(2)) / XM(2)$

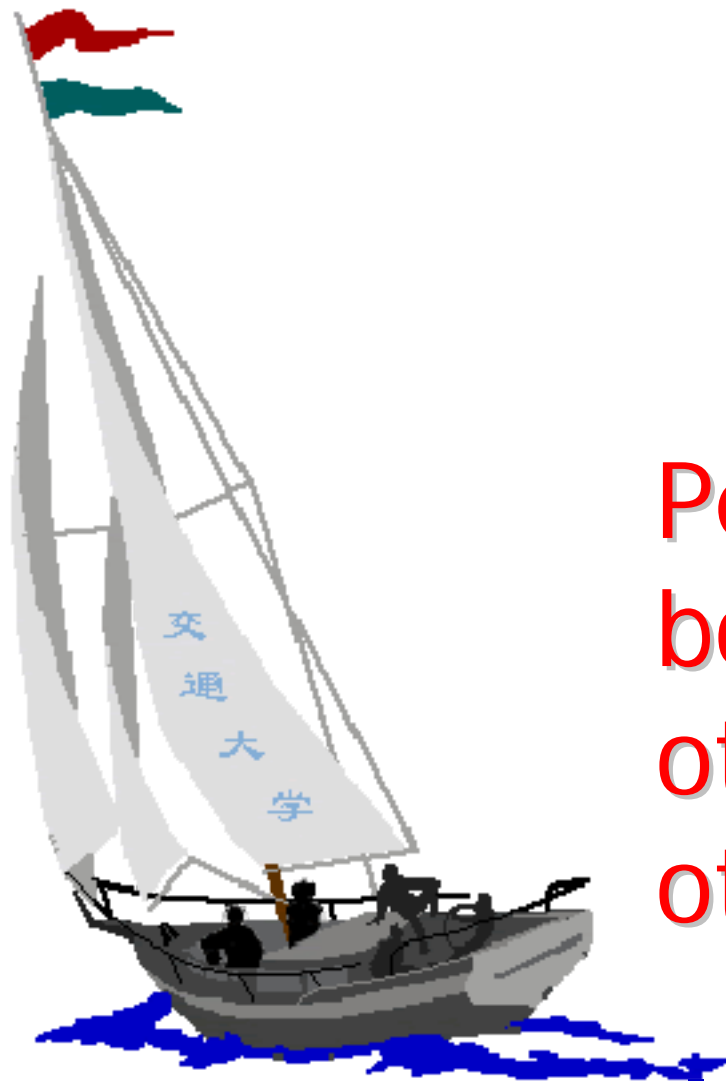
· · CASE(2)

· · · ·  $QI = AI$

· · CASE(3)

· · · ·  $QI = AI - BI \cdot T(1)$





# 同舟共济 渡彼岸!

People in the same  
boat help each  
other to cross to the  
other bank, where....